

5. cvičení - teorie

Věta 20 (derivace složené funkce). Necht' $r, s \in \mathbb{N}$ a necht' $G \subset \mathbb{R}^s, H \subset \mathbb{R}^r$ jsou otevřené množiny. Necht' $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in C^1(G), f \in C^1(H)$ a bod $[\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)] \in H$ pro každé $x \in G$. Potom složená funkce $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ daná předpisem

$$F(x) = f(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x)), x \in G,$$

je třídy C^1 na G . Necht' $a \in G$ a $b = [\varphi_1(a), \dots, \varphi_r(a)]$. Pak pro $j \in \{1, \dots, s\}$ platí

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial y_i}(b) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a).$$

Věta 22 (o implicitní funkci). Mějme otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a bod $[x_0, y_0] \in G$. Uvažujme funkci $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ splňující:

- (i) $F \in C^1(G)$,
- (ii) $F(x_0, y_0) = 0$,
- (iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existuje U okolí bodu x_0 (v $\mathbb{R}^n$) a okolí V bodu y_0 (v $\mathbb{R}$) taková, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ splňující $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y jako $\varphi(x)$, pak takto vzniklá funkce $\varphi \in C^1(U)$ a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))} \text{ pro } x \in U, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Poznámka. Vždy platí, že $\varphi(x_0) = y_0$ a $F(x, \varphi(x)) = 0$ na jistém okolí bodu x_0 .

Věta 23 (O dvou implicitních funkcích). Mějme otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^{n+2}$ a bod $[x_0, y_0] \in G$. Uvažujme dvě funkce $F_1, F_2 : G \rightarrow \mathbb{R}$ splňující pro nějaké $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$:

- (a) $F_1, F_2 \in C^k(G)$,
- (b) $F_1(x_0, y_0) = 0, F_2(x_0, y_0) = 0$ a

$$(c) \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} (x_0, y_0) = \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(x_0, y_0) - \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Potom existuje U okolí bodu x_0 (v $\mathbb{R}^n$) a okolí V bodu y_0 (v $\mathbb{R}^2$) taková, že pro každé $x \in U$ existuje jediné $y \in V$ splňující $F_1(x, y) = 0 = F_2(x, y)$. Můžeme tedy reprezentovat $[y_1, y_2] = [\varphi(x), \psi(x)]$ pro nějaké funkce $\varphi, \psi \in C^k(U)$.

Poznámka. Obvykle dostaneme soustavu rovnic o proměnných x, y, u, v . Pak bod x_0 v větě výše je z našeho zadání $[x_0, y_0]$ a bod y_0 je z našeho zadání bod $[u_0, v_0]$. Vždy platí $\varphi(x_0, y_0) = u_0, \psi(x_0, y_0) = v_0$ a $F_1(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) = 0$ na jistém okolí $[x_0, y_0]$.

Definice (Tečná nadrovina). Necht' $G \subset \mathbb{R}^n$, $a \in G$, $f \in \mathbb{C}^1(G)$. Pak graf funkce

$$T(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(a) \cdot (x_i - a_i)$$

je *tečná nadrovina* ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$.

Poznámka (Prohození souřadnic). Chceme-li ukázat, že zadaná rovnost určuje implicitně zadanou funkci jiných proměnných, než obvykle, stačí v postupu prohodit souřadnice. Vizte příklad níže.

Příklad. Ukažte, že rovnice $x^2 + y^2 = 1$ určuje na okolí bodu $[1, 0]$ implicitně zadanou funkci φ proměnné y . (nikoli proměnné x).

Postup bude stejný, akorát tam, v postupu prohodíme výskyty F'_x, F'_y - tj. při ověřování (iii) ve větě 22 budeme zjišťovat, zda $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$ atd.

Návod

- anulujeme rovnici a nenulovou stranu označíme jako F
- spočteme parciální derivace F
- ověříme předpoklady věty 22, resp. věty 23
- dle věty 22, resp. 23, spočteme φ' , resp. φ', ψ' pomocí násl.
 - pomocí řetízkového pravidla
 - metodou: zderivuji rovnost $F(x, \varphi(x)) = 0$ podle příslušné proměnné, vyjádřím φ'
- dosadíme spočtené do tečné nadroviny z definice

Níže uvedené vzorce je potřeba u zkoušky napísat na papier!

Vzorec pro φ' (jedna implicitní funkce) (odvozen v 5. cvičení dle vět 22 a 20)

$$\varphi'' = - \frac{(F''_{x,x} + F''_{x,y} \cdot \varphi') \cdot F'_y - F'_x \cdot (F''_{y,x} + F''_{y,y} \cdot \varphi')}{(F'_y)^2}$$

Poznámka. Pokud chceme, aby $x = \varphi(y)$, pak vzorec výše musíme upravit tak, že kde je F'_x bude F'_y a naopak.

Vzorce pro parciální derivace funkcí φ a ψ (odvození níže)

$$\begin{aligned} \psi'_x &= \frac{(F_2)'_x (F_1)'_u - (F_1)'_x (F_2)'_u}{(F_1)'_v (F_2)'_u - (F_2)'_v (F_1)'_u}, & \varphi'_x &= \frac{-(F_1)'_v \psi'_x - (F_1)'_x}{(F_1)'_u} \\ \psi'_y &= \frac{(F_2)'_y (F_1)'_u - (F_1)'_y (F_2)'_u}{(F_1)'_v (F_2)'_u - (F_2)'_v (F_1)'_u}, & \varphi'_y &= \frac{-(F_1)'_v \psi'_y - (F_1)'_y}{(F_1)'_u} \end{aligned}$$

Odvození vzorců derivací φ a ψ

Platí, že $F_1(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) = 0 = F_2(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y))$. Rovnosti zderivujeme podle x , přičemž použijeme řetízkové pravidlo (věta 20).

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial F_1}{\partial x} \stackrel{V20}{=} (F_1)'_x + (F_1)'_u \cdot \varphi'_x + (F_1)'_v \cdot \psi'_x \quad / \cdot (F_2)'_u \\
 0 &= \frac{\partial F_2}{\partial x} \stackrel{V20}{=} (F_2)'_x + (F_2)'_u \cdot \varphi'_x + (F_2)'_v \cdot \psi'_x \quad / \cdot (F_1)'_u \\
 \hline
 0 &= (F_1)'_x (F_2)'_u + (F_1)'_u (F_2)'_u \cdot \varphi'_x + (F_1)'_v (F_2)'_u \cdot \psi'_x \\
 0 &= (F_2)'_x (F_1)'_u + (F_2)'_u (F_1)'_u \cdot \varphi'_x + (F_2)'_v (F_1)'_u \cdot \psi'_x \\
 \hline
 0 &= (F_1)'_x (F_2)'_u - (F_2)'_x (F_1)'_u + (F_1)'_v (F_2)'_u \cdot \psi'_x - (F_2)'_v (F_1)'_u \cdot \psi'_x \\
 \psi'_x &= \frac{(F_2)'_x (F_1)'_u - (F_1)'_x (F_2)'_u}{(F_1)'_v (F_2)'_u - (F_2)'_v (F_1)'_u}
 \end{aligned}$$

Navíc z úplně první rovnosti plyne, že $\varphi'_x = \frac{-(F_1)'_v \psi'_x - (F_1)'_x}{(F_1)'_u}$.

Analogicky se odvodí vztahy pro derivace podle y . Dostáváme tedy následující.

$$\begin{aligned}
 \psi'_x &= \frac{(F_2)'_x (F_1)'_u - (F_1)'_x (F_2)'_u}{(F_1)'_v (F_2)'_u - (F_2)'_v (F_1)'_u}, \varphi'_x = \frac{-(F_1)'_v \psi'_x - (F_1)'_x}{(F_1)'_u} \\
 \psi'_y &= \frac{(F_2)'_y (F_1)'_u - (F_1)'_y (F_2)'_u}{(F_1)'_v (F_2)'_u - (F_2)'_v (F_1)'_u}, \varphi'_y = \frac{-(F_1)'_v \psi'_y - (F_1)'_y}{(F_1)'_u}
 \end{aligned}$$

Alternatívne si vieme vyššie odvodenú sústavu prepísať maticovo.

$$\begin{aligned}
 0 &= (F_1)'_x + (F_1)'_u \cdot \varphi'_x + (F_1)'_v \cdot \psi'_x \\
 0 &= (F_2)'_x + (F_2)'_u \cdot \varphi'_x + (F_2)'_v \cdot \psi'_x
 \end{aligned}$$

Takže dostávame:

$$\begin{pmatrix} -(F_1)'_x \\ -(F_2)'_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (F_1)'_u & (F_1)'_v \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi'_x \\ \psi'_x \end{pmatrix}$$

To riešime prepisom na rozšírenú maticu sústavy a Gaussovu elimináciu. Hlavná výhoda je, že maticu

$$\begin{pmatrix} (F_1)'_u & (F_1)'_v \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v \end{pmatrix}$$

,

sme už vypočítali pri overovaní podmienky 3 vo vete o implicitných funkciách a stačí si ju prepísať.